Parties de poker

Ce sujet aborde de manière très simplifiée des questions de probabilités inspirées de situations liées à des parties de poker. Néanmoins, aucune connaissance de ce jeu de cartes n'est nécessaire, et toutes les questions se traitent avec les outils du programme. **Les trois parties de ce problème sont indépendantes.**

1 Notations, définitions et règle du jeu

Lors de certains tournois de poker (du type Texas Hold'em), chaque joueur dispose de deux cartes, connues de lui seul. Au milieu de la table sont successivement dévoilées (à la condition qu'au moins deux joueurs n'aient pas encore abandonné) cinq cartes : d'abord le flop, constitué de trois cartes, puis la quatrième carte (appelée *turn*), et enfin la dernière carte appelée *river.* La main définitive d'un joueur est la meilleure main de cinq cartes parmi sept cartes (les deux siennes plus les cinq communes sur la table). Le jeu de cartes est un jeu de 52 cartes (13 cartes de chaque couleur (trèfle, carreau, coeur, pique)), et il est mélangé après chaque donne. Il reste trois joueurs autour de la table : Nicolas, Didier et Alexis. On suppose que tous les tirages sont équiprobables. Dans une donne, les tirages sont indépendants et sans remise.

2 Mains de poker

1. Lors de la première donne, Alexis a Roi de Coeur et Dame de Pique, Didier a Valet de Coeur et Valet de Trèfle, Nicolas a Dix de Trèfle et Deux de Trèfle. Le flop (trois premières cartes communes) est constitué de As de Pique, Dix de Pique, et Trois de Trèfle. La quatrième carte est le Six de Trèfle. Si la dernière carte (river) est un roi ou une dame d'une couleur autre que Trèfle, ou un Valet, Alexis aura la meilleure main. Si c'est un Trèfle ou un Deux, Nicolas aura la meilleure main. Dans tous les autres cas, Didier gagne.
   (a) Quelle est la probabilité que Didier ait la meilleure main au final (en connaissant les cartes de tous les joueurs) ?
   (b) Quelle est la probabilité conditionnelle que Nicolas ait au final la meilleure main, sachant que Didier n'a pas la meilleure main ?

2. Une nouvelle donne commence. Quelle est la probabilité pour Alexis d'avoir un carré (4 cartes de la même hauteur, par exemple quatre As, quatre Dames, ...) (avec les sept cartes) ?
3. Sachant qu'Alexis a un carré d'As (avec sept cartes), quelle est la probabilité que ses deux cartes (connues de lui seules) soient deux As ?

3 Durées de jeu

On suppose jusqu'à la fin de l'énoncé que la durée d'une partie de poker peut être modélisée par une loi exponentielle, dont le paramètre dépend du nombre et de la valeur des joueurs. Lucien, le fils de Didier, fait une partie avec Laurence, la fille de Daniel. Daniel joue au poker à une autre table que Didier. On modélise respectivement la durée d'une partie à la table de Daniel par la variable aléatoire X_1 de loi exponentielle de paramètre λ_1, celle de la table de Didier par X_2 de loi exponentielle de paramètre λ_2. En attendant leurs parents, Laurence et Lucien jouent eux aussi à une autre table. La durée de leur partie est modélisée par une variable aléatoire X_3 de loi exponentielle de paramètre λ_3. On suppose que X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes.
On admettra le résultat suivant : si X est une variable aléatoire positive admettant la densité f_X, alors pour toute variable aléatoire Y indépendante de X,

$$P(Y > X) = \int_0^{+\infty} P(Y > x) f_X(x) dx.$$

On rappelle également que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ est donnée par

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

pour $x \geq 0$ et $F_X(x) = 0$ pour $x < 0$.

1. Les enfants peuvent jouer jusqu'à ce qu'un des deux parents (Didier ou Daniel) ait fini de jouer. Le temps pendant lequel ils peuvent jouer est modélisé par la variable aléatoire

$$Y_{1,2} = \min(X_1, X_2).$$

Montrer que $Y_{1,2}$ suit une loi exponentielle dont le paramètre est à préciser (identifier $P(Y_{1,2}) > x$ pour $x \geq 0$).

2. Déterminer la moyenne et la variance de $Y_{1,2}$.
3. Calculer la probabilité que ce soit la partie de Daniel qui termine en premier
$$P(X_1 < X_2).$$
4. Calculer la probabilité que les enfants aient le temps de terminer leur partie avant Didier et Daniel
$$P(X_3 < \min(X_1, X_2)).$$
5. Déterminer la probabilité
$$P(X_3 > 3 \mid X_1 > 3).$$
6. Déterminer
$$P(X_1 > 4 \mid X_1 > 3).$$
7. Déterminer
$$P(\min(X_1, X_2, X_3) > 3 \mid \min(X_1, X_2, X_3) > 1).$$
8. Soit I la variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$ définie par
$$\{I = i\} = \{\forall j \neq i, X_j > X_i\} \quad \text{pour } i \in \{1, 2, 3\},$$
et $I = 0$ si le minimum est atteint par au moins deux variables aléatoires parmi X_1, X_2 et X_3 (ce qui se produit avec probabilité nulle).
   (a) A quel événement correspond $\{I = 1\}$? (donner une réponse littéraire)
   (b) Montrer que I et $T = \min(X_1, X_2, X_3)$ sont indépendants.
9. On suppose (dans cette question) que chaque enfant va se coucher dès que sa partie ou celle de son père est terminée. Laurence va donc se coucher après le temps aléatoire $W_1 = \min(X_1, X_3)$, et Lucien après le temps aléatoire $W_2 = \min(X_2, X_3)$. Le but est d'étudier les propriétés de la loi jointe de (W_1, W_2), c'est-à-dire par exemple des probabilités
$$P(W_1 > x_1, W_2 > x_2)$$
pour $x_1, x_2 \geq 0$.

(a) Soit $x_1, x_2 \geq 0$. Déterminer

$$P(W_1 > x_1, W_2 > x_2).$$

(b) W_1 et W_2 sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

(c) Montrer que pour $x_1, x_2 \geq 0$ et pour $h > 0$,

$$P(W_1 > x_1{+}h, W_2 > x_2{+}h \mid W_1 > x_1, W_2 > x_2) = P(W_1 > h, W_2 > h).$$

10. On suppose maintenant que les enfants enchaînent les parties jusqu'à ce qu'un des deux parents ait terminé la sienne. Le but est de déterminer la loi du nombre N de parties que les enfants ont le temps de jouer **en entier**. Pour $k \geq 1$, soit Z_k la durée de la k-ème partie potentielle des enfants, et

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i$$

la date à laquelle la k-ème partie potentielle des enfants s'achève. Posons $S_0 = 0$. La variable aléatoire N est logiquement définie par

$$\{N = k\} = \{S_k \leq Y_{1,2} < S_{k+1}\}$$

pour $k \in \mathbb{N}$. Les Z_k sont supposés indépendants, identiquement distribués, de même loi que X_3, et indépendants de X_1 et de X_2.

(a) Déterminer $P(N = 0)$.

(b) Calculer

$$P(Z_1 + Z_2 < Y_{1,2} \mid Z_1 < Y_{1,2}).$$

(c) En déduire $P(N \geq 2 \mid N \geq 1)$, et montrer plus généralement que

$$P(N \geq k+1 \mid N \geq k) = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

pour $k \geq 1$.

(d) Déterminer la loi de $N + 1$.

(e) Déterminer la moyenne et la variance de N.

(f) Quelle propriété importante est commune à N, X_1 et X_2 ?

4 Assurance garde d'enfants

Un actuaire un peu surmené, en recherche d'une nounou et inspiré par sa femme enceinte qui joue au poker imagine un produit d'assurance garde d'enfants lors de tournois de poker. On suppose que le casino organise systématiquement une garde d'enfants collective gratuite pendant trois heures. Passé ce délai, si la partie n'est pas finie, l'enfant se retrouve dans la nature, et il faut donc recourir à une garde complémentaire jusqu'à la fin de la partie, très coûteuse : n_0 euros de l'heure (toute heure commencée doit être payée). La garantie proposée est donc la suivante : en échange d'une prime d'assurance π payée à l'avance, l'assureur garantit qu'après les trois heures de garde usuelles, une nounou agréée s'occupera de l'enfant jusqu'à la fin de la partie si celle-ci devait se prolonger au-delà des trois heures. Par exemple, si la partie dure 5 heures et 10 minutes en tout, la nounou s'occupera de l'enfant pendant 2 heures et 10 minutes. Cette prestation aurait été facturée $3n_0$ euros sans l'assurance (la troisième heure de nounou étant commencée). On suppose que la durée de la partie de poker est modélisée par la variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. L'unité de temps est l'heure. Le coût pour l'assureur est donc modélisé par la variable aléatoire C définie par

$$C = \begin{cases} 0 & \text{si } X \leq 3 \\ n_0\left(\lceil X-3 \rceil\right) & \text{si } X > 3, \end{cases}$$

où pour un réel t on définit $\lceil t \rceil$ par :

$$\lceil t \rceil = k \quad \text{si } t \in]k-1, k] \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}.$$

$\lceil t \rceil$ est donc le plus petit entier supérieur ou égal à t.
Pour $|a| < 1$, rappelons que

$$\sum_{k \geq 1} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

1. Déterminer la loi de C (c'est-à-dire les probabilités $P(C = kn_0)$ pour $k \geq 0$).
2. Déterminer la prime pure, c'est-à-dire le coût moyen pour l'assureur $E(C)$.
3. En pratique l'assureur pourrait par exemple appliquer un chargement de 20% et ferait donc payer $\pi = \frac{120}{100}E(C)$. Déterminer la moyenne du gain algébrique de l'assureur $G = \pi - C$. Exprimer la variance de G à l'aide de la variance de C (qu'on ne demande pas de calculer).